



Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{R}^3$)

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ sind:

- (i) $\{(-1, 1, 5)\}$
- (i) $\{(0, 0, 0), (-1, 1, 5)\}$
- (iii) $\{(-1, 1, 5), (2, 1, 3), (-2, 2, 10)\}$

Lösung 1

- (i) $\{(-1, 1, 5)\}$ ist linear unabhängig, da $(-1, 1, 5) \neq (0, 0, 0)$, also für alle $\lambda \neq 0$ ist

$$\lambda \cdot (-1, 1, 5) \neq (0, 0, 0).$$

- (ii) $\{(0, 0, 0), (-1, 1, 5)\}$ ist linear abhängig:

$$\lambda \cdot (0, 0, 0) + 0 \cdot (-1, 1, 5) = (0, 0, 0)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (iii) $\{(-1, 1, 5), (2, 1, 3), (-2, 2, 10)\}$ ist linear abhängig:

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1(-1, 1, 5) + \lambda_2(2, 1, 3) + \lambda_3(-2, 2, 10) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot (-2) = 0 \tag{1}$$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 2 = 0 \tag{2}$$

$$\lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot 10 = 0 \tag{3}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt, dass $\lambda_2 = 0$ sein muss. Wir setzen das in allen drei Gleichungen ein und erhalten

$$\lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_3 \cdot (-2) = 0 \tag{1a}$$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 2 = 0 \tag{2a}$$

$$\lambda_1 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 10 = 0. \tag{3a}$$

Wir beobachten, dass diese drei Gleichungen von λ_1 und λ_3 erfüllt werden genau dann, wenn $\lambda_1 = -2\lambda_3$.

Somit gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ (z.B. $\lambda = 1$):

$$2\lambda \cdot (-1, 1, 5) + 0 \cdot (2, 1, 3) - \lambda \cdot (-2, 2, 10) = (0, 0, 0),$$

also ist die Menge $\{(-1, 1, 5), (2, 1, 3), (-2, 2, 10)\}$ linear abhängig.

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{C}^3$)

Man betrachte $\mathbb{C}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Untersuchen Sie,

- (i) ob die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind,
- (ii) ob die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind.

Lösung 2

- (i) Die Vektoren sind linear abhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$i\lambda_1 + \lambda_2 + (3i)\lambda_3 = 0 \quad (1)$$

$$2\lambda_1 - i\lambda_2 + (4-i)\lambda_3 = 0 \quad (2)$$

$$-\lambda_1 + 0\lambda_2 + (-1+i)\lambda_3 = 0 \quad (3)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$i \cdot (1) + (2) : \quad \lambda_1 + (1-i)\lambda_3 = 0 \iff \lambda_1 = (-1+i)\lambda_3, \quad (4)$$

was äquivalent zu (3) ist.

Setzen wir $\lambda_1 = (-1+i)\lambda_3$ in (1) ein, bekommen wir

$$i(-1+i)\lambda_3 + \lambda_2 + (3i)\lambda_3 = 0 \quad (5)$$

$$\iff \lambda_2 = (i(1-i) - 3i)\lambda_3 = (1-2i)\lambda_3 \quad (6)$$

Wir bekommen also nichttriviale Linearkombinationen des Nullvektors, z.B.

$$(-1+i) \cdot \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (1-2i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (ii) Die Vektoren sind linear unabhängig: Seien $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$i\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 = 0 \quad (1)$$

$$\mu_1 - i\mu_2 + 0 \cdot \mu_3 = 0 \quad (2)$$

$$3\mu_1 + i\mu_2 - \mu_3 = 0 \quad (3)$$

$$(1) - (3) : \quad (-3+i)\mu_1 + (2-i)\mu_2 = 0 \quad (4)$$

$$\cdot \stackrel{(-3-i)}{\Longleftrightarrow} 10\mu_1 + (-7+i)\mu_2 = 0 \quad (5)$$

$$(5) - 10 \cdot (2) : \quad (-7 + 11i)\mu_2 = 0 \quad (6)$$

$$\implies \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Da $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist, sind auch $\mu_1 = 0 = \mu_3$.

Aufgabe 3 (Basen von Vektorräumen)

Geben Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis an:

(i) $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$

(ii) $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Lösung 3

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\} = \{(a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$. Da $(1, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$ linear unabhängig sind, ist $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ eine Basis dieses Vektorraums.

(ii) Alle $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_2$ lösen das Gleichungssystem

$$x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 0 \quad (8)$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \quad (9)$$

Mit einer freien Wahl von x_1 und x_2 erhalten wir aus Gleichung (8), dass $x_4 = -\frac{x_1+3x_2}{2}$ und aus Gleichung (9), dass $x_3 = -2x_1 - x_2$. Also ist

$$V_2 = \{(a, b, -(2a+b), -\frac{a+3b}{2}) : a, b \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, 0, -2, -\frac{1}{2}), (0, 1, -1, -\frac{3}{2})).$$

Da $(1, 0, -2, -\frac{1}{2})$ und $(0, 1, -1, -\frac{3}{2})$ linear unabhängig sind, ist $\{(1, 0, -2, -\frac{1}{2}), (0, 1, -1, -\frac{3}{2})\}$ eine Basis von V_2 .

Aufgabe 4

Es sei $P_2(\mathbb{R}) := \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (als Untervektorraum des Vektorraums aller reellen Polynome).

(i) Zeigen Sie, dass sowohl $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2\}$ als auch $\mathcal{B}_2 := \{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$ Basen von $P_2(\mathbb{R})$ sind.

(ii) Drücken Sie das Polynom $(x+1)^3 - (x-1)^3$ sowohl bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ als auch bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ aus.

Lösung 4

(i) Dass $\mathcal{B}_1$ $P_2(\mathbb{R})$ erzeugt ist nach Definition von $P_2(\mathbb{R})$ klar. Aus der Definition¹ sieht man auch, dass

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a = b = c = 0,$$

¹Bemerkung: Polynome sind hier nach Definition Ausdrücke der Form $ax^2 + bx + c$. Man kann zu jedem Polynom die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ zuordnen; bei Polynomfunktionen zu Polynomen mit reellen Koeffizienten ist es auch der Fall, dass eine Polynomfunktion genau dann die Nullfunktion ist, wenn alle Koeffizienten 0 sind. Dies ist aber nicht immer der Fall: in $P_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist $P = [1]x^2 + [1]x$ nicht das Nullpolynom, aber $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, f(x) = [1]x^2 + [1]x = [0]$ für alle $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

also sind die Monome $1, x, x^2$ linear unabhängig.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}_2$ auch $P_2(\mathbb{R})$ erzeugt, schreiben wir das Monom x^2 als Linearkombination in $\mathcal{B}_2$:

$$x^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + \frac{1}{3} \cdot 1$$

Also ist der Spann von $\mathcal{B}_1$ (was ganz $P_2(\mathbb{R})$ ist) im Spann von $\mathcal{B}_2$ enthalten.

$\mathcal{B}_2$ ist außerdem linear unabhängig: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) + bx + c &= 0 \\ \iff \frac{3}{2}ax^2 + bx + \left(c - \frac{a}{2}\right) &= 0 \\ \iff \frac{3}{2}a = 0 \wedge b = 0 \wedge c - \frac{a}{2} &= 0 \\ \iff a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = \frac{a}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$.

(ii)

$$\begin{aligned} (x+1)^3 - (x-1)^3 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 6x^2 + 2 && \text{(bezüglich } \mathcal{B}_1) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + 4 && \text{(bezüglich } \mathcal{B}_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 5 ($\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum vs. $\mathbb{Q}$ -Vektorraum)

$\mathbb{R}$ ist sowohl über dem Körper $\mathbb{R}$ als auch über dem Körper $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Vektoren $1 \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

- (i) linear abhängig sind, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffasst,
- (ii) linear unabhängig sind, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum auffasst.

Lösung 5

- (i) $\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1$, also ist $\sqrt{2} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(1)$.
- (ii) Könnte man $\sqrt{2} = q \cdot 1$ für ein $q \in \mathbb{Q}$ schreiben, wäre $\sqrt{2} = q \in \mathbb{Q}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (siehe Übungsblatt 1).